



بخش آموزش رسانه تفریحی سنتر

کلیک کنید  www.tafrihicenter.ir/edu

 نمونه سوال  گام به گام

 امتحان نهایی  جزوه

 دانلود آزمون های آزمایشی

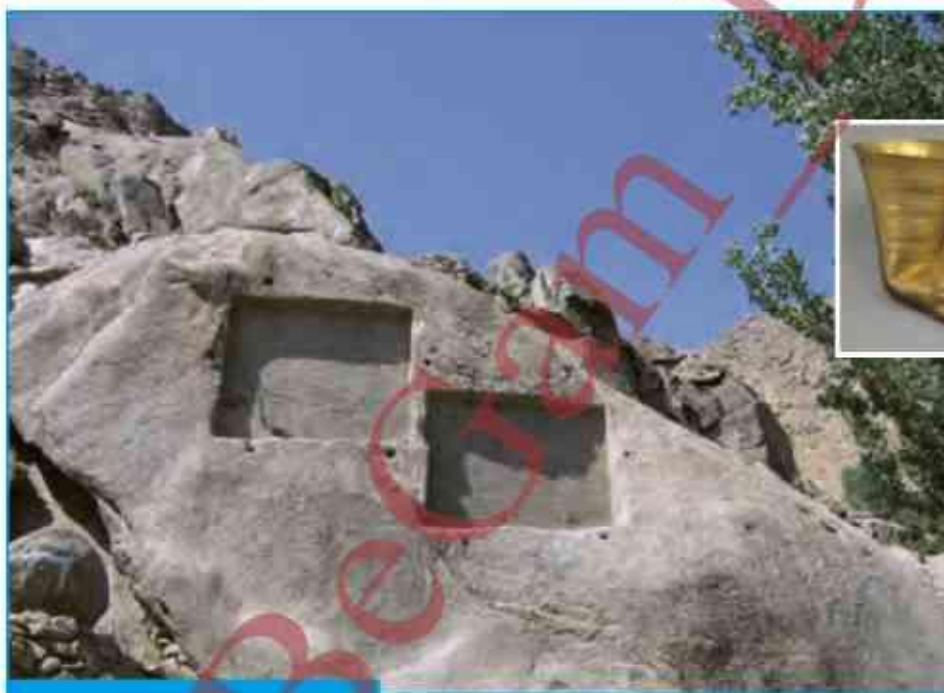
متوسطه اول : هفتم ... هشتم ... نهم

متوسطه دوم : دهم ... یازدهم ... دوازدهم

www.tafrihicenter.ir

توابع نمایی و لگاریتمی

فصل



سنگ نوشته‌های گنبد (همدان) نوشته‌هایی از دوران هخامنشی بر دل صخره‌های اوند (قدیم حدوداً ۲۵۰۰ سال)

نمادون نمایی و لگاریتمی (نمادون نمایی و لگاریتمی)

آیا تا به حال اندیشیده‌اید که باستان‌شناسان چگونه طول جبریک را باستانی را تخمین می‌زنند؟
با استفاده از روش سال‌بانی کربن ۱۴ می‌توان عمر یک اثر باستانی را محاسبه کرد. در این روش، تعیین قدمت اثر، با یک تابع لگاریتمی ممکن می‌شود.

تابع نمایی و ویژگی‌های آن

تابع لگاریتمی و ویژگی‌های آن

نمودارها و کاربردهای توابع نمایی و لگاریتمی

درس اول

درس دوم

درس سوم

مسابقات جام حذفی فوتبال ایران در فصل ۹۴-۹۳ با شرکت ۳۲ تیم و در پنج مرحله بازی از یک شانزدهم نهایی تا بازی نهایی به صورت زیر برگزار شد. همان طور که می‌بینید، در هر مرحله تیم برنده به مرحله بعدی می‌رود و تیم بازنده حذف می‌شود؛ به همین دلیل جام حذفی نامیده می‌شود.



۱ در بازی نهایی چند تیم حضور دارند؟ ۲ تیم

۲ در مرحله قبل از بازی نهایی چند تیم حضور دارند؟ ۴ تیم

۳ تعداد تیم ها در هر مرحله با تعداد تیم ها در مرحله قبل از آن چه ارتباطی دارد؟

اگر تعداد تیم های هر مرحله را در ۲ ضرب کنیم، تعداد تیم های مرحله قبل به دست می آید.

به عبارتی: تعداد تیم ها در مرحله قبل = تعداد تیم ها در هر مرحله $\times 2$

۴ چه رابطه ای بین تعداد مراحل و تعداد کل تیم های شرکت کننده در این مسابقات برقرار است؟

(تعداد مراحل)
تعداد کل تیم های شرکت کننده = 2^n

۵ باتوجه به الگوی ارائه شده در شکل، اگر تعداد مراحل برابر ۶ باشد، تعداد تیم های اولیه چند تاست؟

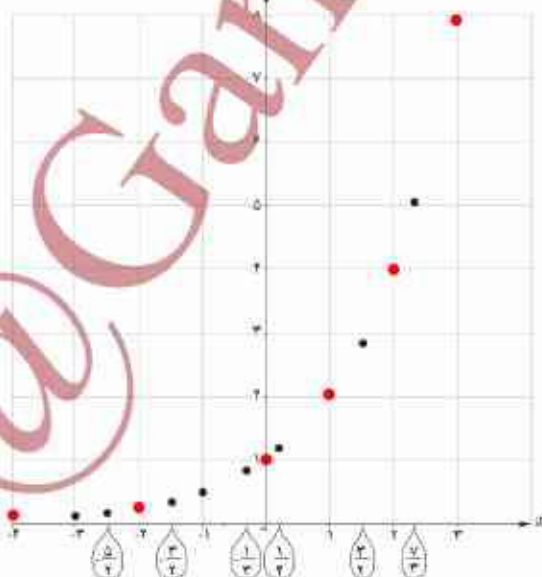
$64 = 2^6$ = تعداد تیم های اولیه

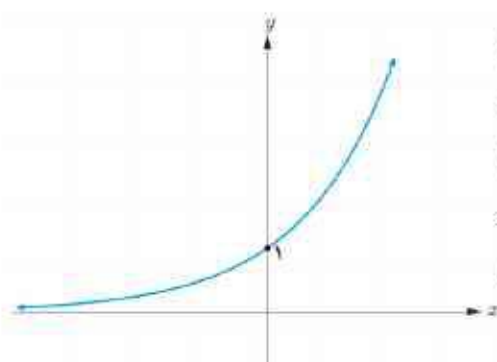
۶ اگر تعداد مراحل x و تعداد کل تیم ها y باشد، چه رابطه ای بین x و y برقرار است؟ $y = 2^x$

فعالیت

جدول زیر را کامل و نقاط به دست آمده را در نمودار مشخص کنید. مقادیر به صورت تقریبی نوشته شده است.

x	-4	-3	$-\frac{5}{4}$	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3
2^x	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	2	$\frac{2}{3}$	4	$\frac{5}{4}$	8





دیدیم که برای هر عدد گویای a ، مقداری برای 2^a به دست می‌آید و نقطه $(a, 2^a)$ را می‌توان در دستگاه مختصات نشان داد. این موضوع برای اعداد گنگ نیز برقرار است، یعنی برای هر عدد گنگ مانند b نیز مقداری برای 2^b خواهیم داشت و مختصات $(b, 2^b)$ نیز نقطه‌ای را در دستگاه مختصات نمایش می‌دهد. اگر برای تمام اعداد حقیقی x ، مقادیر 2^x را به دست آوریم و نقاط $(x, 2^x)$ را در دستگاه مختصات مشخص کنیم، نمودار مقابل به دست خواهد آمد.

توان‌های حقیقی

در کتاب سال دهم، به ازای هر عدد حقیقی مثبت a ($a \neq 1$) و عدد گویای $\frac{m}{n}$ ، مقدار $a^{\frac{m}{n}}$ را تعریف کردیم و ویژگی‌های مقدماتی آن را به دست آوردیم. این قوانین برای توان‌های حقیقی نیز برقرار است؛ یعنی اگر a و b دو عدد حقیقی مثبت و مخالف ۱ و x و y دو عدد حقیقی باشند، داریم:

$$\begin{array}{llll} \text{الف)} \quad a^0 = 1 & \text{ب)} \quad a^{-x} = \frac{1}{a^x} & \text{پ)} \quad a^x \cdot a^y = a^{x+y} & \text{ت)} \quad (a^x)^y = a^{xy} \\ \text{ث)} \quad (ab)^x = a^x \cdot b^x & \text{ج)} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x} & \text{ح)} \quad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \end{array}$$

کار در کلاس

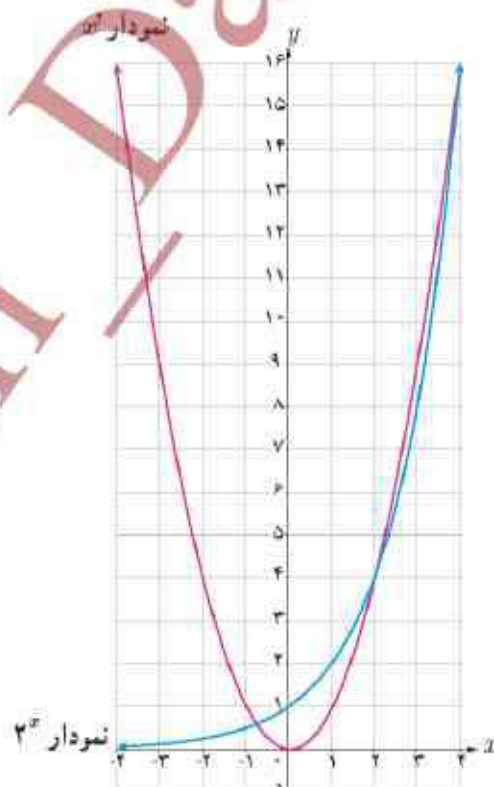
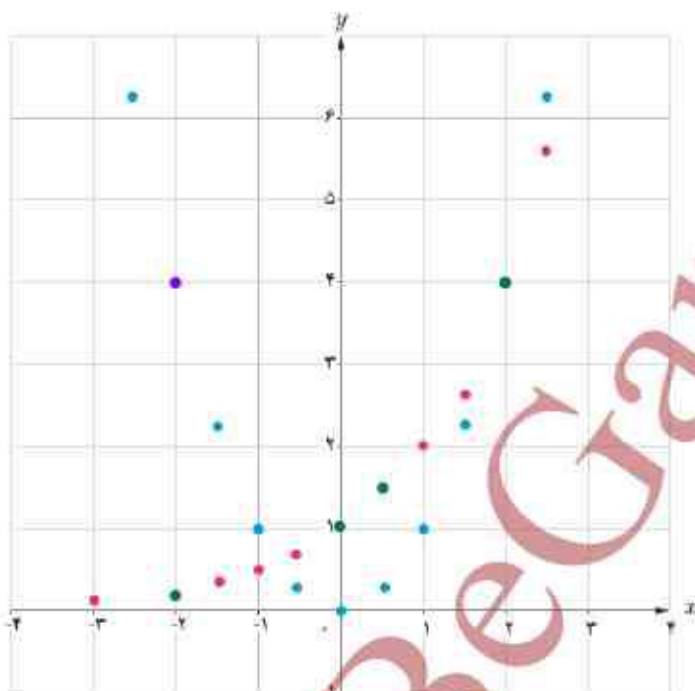
۱) نمودارهای توابع با ضابطه‌های $y = 2^x$ و $y = x^2$ را با تکمیل جدول‌های زیر رسم کنید. مقادیر به صورت تقریبی نوشته شده است.

x	$\frac{5}{2}$	2	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{5}{2}$
$y = x^2$	$6\frac{25}{4}$	4	$2\frac{25}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$2\frac{25}{4}$	$6\frac{25}{4}$

x	$\frac{5}{2}$	2	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{5}{2}$
$y = 2^x$	$5\frac{5}{16}$	4	$2\frac{25}{16}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$

۲. حال این دو نمودار را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم. در چند نقطه مقادیر 2^x و x^2 باهم مساوی‌اند؟

۳. در x^2 ، متغیر در **پایه** و عدد ثابت در **توان** است؛ ولی در 2^x ، **متغیر** در توان و **عدد ثابت** در پایه است.



هر تابع با ضابطه $f(x) = a^x$ که در آن $a \in \mathbb{R}$ و $a > 0$ ، $a \neq 1$ یک تابع نمایی نامیده می‌شود.

مثال: توابع با ضابطه‌های $y = 2^x$ و $y = 3^x$ و $y = (\frac{1}{4})^x$ و $y = (\frac{1}{5})^x$ نمونه‌ای از توابع نمایی هستند.



نقطه $(0, 1)$

$$R = (-\infty, +\infty), \quad D = (-\infty, +\infty)$$

تقریبی به دست آورید. $2\sqrt{6} = 2/6$

نقطه بر محور x ها عمود می کنیم در نتیجه: $x = 1/8$ که در واقع داریم:

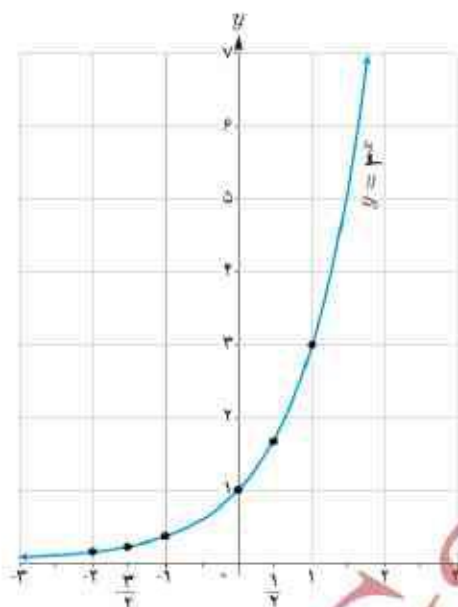
$$r^{-1}, r^{-1/2}, r^0, r^{1/2}, r^{3/2}, r^2, r\sqrt{5}$$

$$r^{-1} < r^{-1/2} < r^{-1/4} < r^{-1/8} < r^{-1/16} < r^{-1/32} < r^{-1/64} < r^{-1/128}$$

$$x < y \Rightarrow r^x < r^y$$

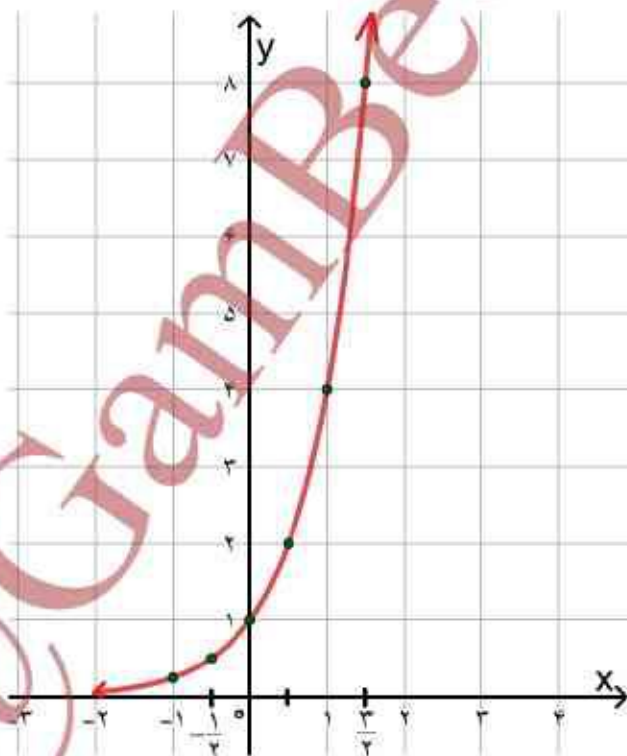
تهیه و تنظیم : عطیه تبریزی

نمودار تابع با ضابطه $y = 3^x$ با استفاده از نقاط جدول زیر رسم شده است.



x	$y = 3^x$
-2	$1/9$
-1	$1/3$
0	1
$1/2$	$\sqrt{3}$
1	3

۱ جدول زیر را کامل کنید و با استفاده از آن نمودار تابع با ضابطه $y = 4^x$ را رسم کنید.



x	$y = 4^x$
$-1/2$	$1/2$
-1	$1/4$
0	1
$1/2$	2
1	4
$3/2$	8

۲ دامنه و برد توابع فوق را باهم مقایسه کنید.

دامنه هر دو تابع مجموعه اعداد حقیقی ($\mathbb{R}$) است، یعنی $D = (-\infty, +\infty)$

برد هر دو تابع مجموعه اعداد حقیقی بزرگ تر از صفر است، یعنی $R = (0, +\infty)$

۲ با استفاده از نمودار، در جاهای خالی علامت مناسب قرار دهید.

الف) $3^{2/5} > 3^{3/5}$

ب) $4^{\sqrt{7}} > 4^{\sqrt{5}}$

با توجه به نمودار این دو تابع، هر قدر که مقدار x یعنی توان عدد های ۳ و ۴ افزایش پیدا کند مقدار y یعنی 3^x و 4^x هم افزایش پیدا می کنند.

۲ اگر $x < y$ ، در جاهای خالی علامت مناسب قرار دهید.

الف) $3^x < 3^y$

ب) $4^x < 4^y$

فعالیت

۱ با استفاده از جدول زیر، نمودار تابع با ضابطه $y = (\frac{1}{4})^x$ را رسم کنید.

x	-۳	-۲	$-\frac{1}{4}$	۰	۱	۲	۳
$y = (\frac{1}{4})^x$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\sqrt{2}$	۱	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{64}$

۲ محل تقاطع نمودار این تابع با محور y ها چه نقطه ای است؟

نقطه $(0, 1)$

۳ دامنه و برد این تابع را بنویسید.

$D = (-\infty, +\infty)$ و $R = (0, +\infty)$

۲ آیا این تابع یک به یک است؟ چرا؟

بله، زیرا خطوط موازی محور x ها، نمودار تابع را

حد اکثر در یک نقطه قطع می کند.

۵ با استفاده از نمودار فوق، در جاهای خالی علامت مناسب قرار دهید.

الف $(\frac{1}{4})^{-5/5} \bigcirc (\frac{1}{4})^{1/5}$

ب $(\frac{1}{4})^{\sqrt{2}} \bigcirc (\frac{1}{4})^4$

ب $(\frac{1}{4})^4 \bigcirc (\frac{1}{4})^3$

۶ با استفاده از نمودار، اگر $x < y$ ، چه رابطه‌ای بین $(\frac{1}{4})^x$ و $(\frac{1}{4})^y$ وجود دارد؟

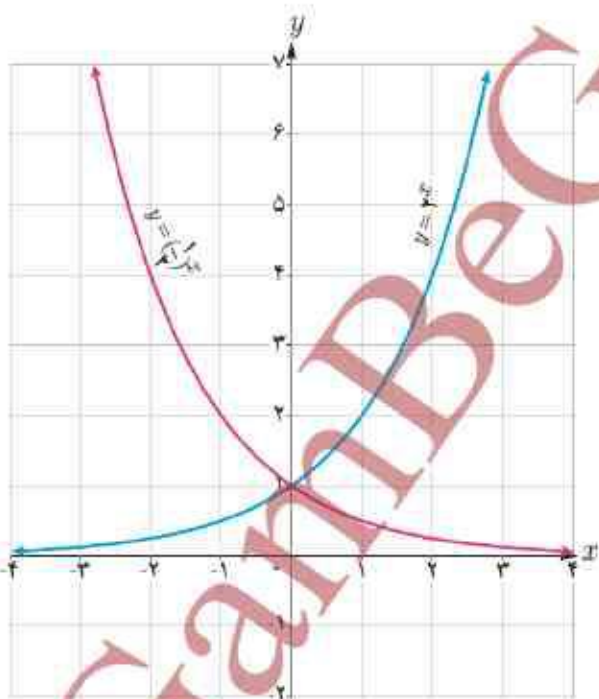
در حالت کلی داریم: $x < y \Rightarrow (\frac{1}{4})^x > (\frac{1}{4})^y$

کار در کلاس

نمودار توابع با ضابطه‌های $y = 2^x$ و $y = (\frac{1}{4})^x$ را در نظر بگیرید.

۱ نمودارهای این دو تابع نسبت به کدام محور مختصات قرینه‌اند؟

نمودارهای این دو تابع نسبت به محور y ها قرینه‌اند.



۲ با جایگذاری $-x$ به جای x در تابع با ضابطه $y = 2^x$

به تابع با ضابطه $y = 2^{-x}$ یا همان $y = (\frac{1}{4})^x$ دست می‌یابیم.

۳ دامنه و برد این دو تابع چه رابطه‌ای با هم دارند؟

دامنه و برد این دو تابع باهم برابرند. یعنی:

$D = (-\infty, +\infty)$ و $R = (0, +\infty)$

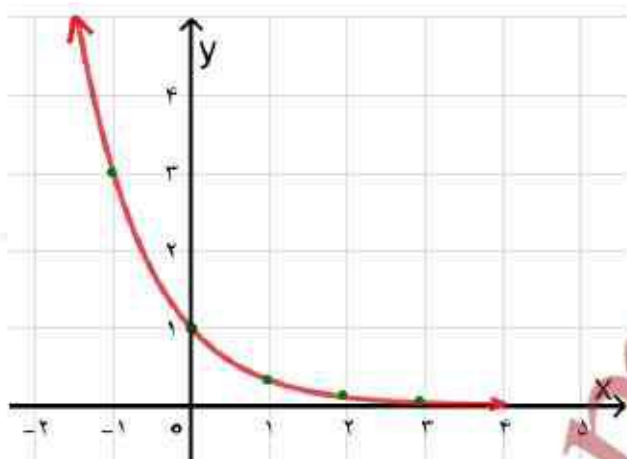
۴ دو تابع نمایی دیگری که نسبت به محور y ها قرینه‌اند، مثال بزنید

$y = (\frac{2}{5})^x$, $y = (\frac{5}{2})^x$ و $y = 3^x$, $y = (\frac{1}{3})^x$

نمودار توابع با ضابطه‌های $y = a^x$ و $y = a^{-x}$ ($a > 0$ و $a \neq 1$) نسبت به محور y ها قرینه‌اند.

کار در کلاس

نمودار تابع با ضابطه $y = (\frac{1}{3})^x$ را رسم کنید.

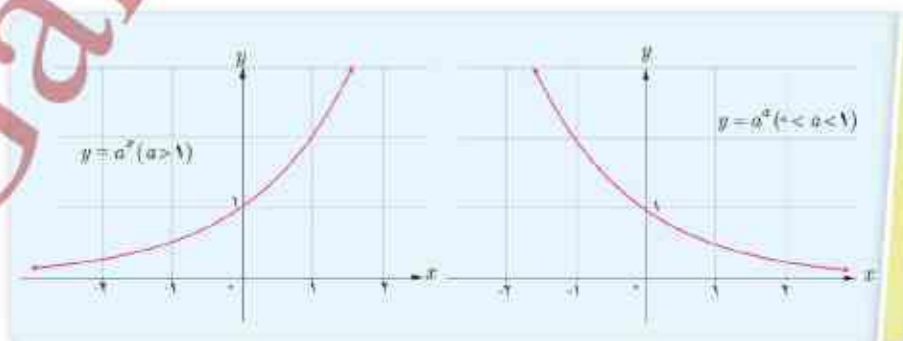


x	$y = (\frac{1}{3})^x$
-1	3
0	1
1	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{9}$

فعالیت

با توجه به مطالبی که در این درس آموخته اید، جملات زیر را تکمیل کنید.

- دامنه تابع با ضابطه $y = a^x$ ($a > 1$) مجموعه اعداد حقیقی و برد آن $(0, +\infty)$ است.
 - دامنه تابع با ضابطه $y = a^x$ ($0 < a < 1$) $\mathbb{R}$ و برد آن بازه $(0, +\infty)$ است.
 - نمودار توابع فوق محور y ها را در نقطه $(0, 1)$ قطع می کند و محور x ها را در هیچ نقطه ای قطع نمی کند.
 - این دو تابع، یک به یک هستند زیرا خطوط موازی محور x ها، نمودار آنها را حداکثر در یک نقطه قطع می کند.
- نمودار توابع نمایی در حالت کلی مشابه نمودارهای زیر است.



معادلات نمایی

معادله‌ای را که در آن متغیر در توان قرار گرفته باشد، معادله نمایی می‌نامند.
برای حل معادلات نمایی از خاصیت یک به یک بودن تابع نمایی استفاده می‌کنیم.
اگر a یک عدد حقیقی مثبت مخالف ۱ باشد و داشته باشیم $a^x = a^y$ آنگاه $x = y$ و برعکس.

مثال: معادله‌های نمایی مقابل را حل کنید.

الف) $3^{2x-3} = 81 \rightarrow 3^{2x-3} = 3^4 \rightarrow 2x-3 = 4 \rightarrow x = \frac{7}{2}$

ب) $4^{2x-1} = 8^{x+1} \rightarrow (2^2)^{2x-1} = (2^3)^{x+1} \rightarrow 4x-2 = 3x+3 \rightarrow x = 5$

پ) $5^{3n-1} = 125^{n+1} \rightarrow 5^{3n-1} = 5^{3n+3} \rightarrow 3n-1 = 3n+3 \rightarrow n = -\frac{4}{3}$

تمرین

۱ کدام یک از ضابطه‌های زیر مربوط به یک تابع نمایی است؟

الف) $y = 2x^2 - 3x + 1$

ب) $y = x^2$

پ) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

ت) $y = \left(\frac{3}{4}\right)^x$

ث) $y - 3x = 2$

ج) $y = \sqrt{x-1}$

قسمت‌های (ب) و (ت) تابع نمایی هستند.

۲ کدام یک از نقاط زیر، روی نمودار تابع با ضابطه $y = 3^x$ قرار دارند؟

الف) $(1, 0)$

بنا بر این نقطه $(0, 1)$ روی نمودار این تابع قرار ندارد. $y = 3^x \Rightarrow 0 \neq 3^1 \Rightarrow$

ب) $(3, 1)$

بنا بر این نقطه $(3, 1)$ روی نمودار این تابع قرار ندارد. $y = 3^x \Rightarrow 1 \neq 3^3 \Rightarrow$

پ) $(0, 1)$

بنا بر این نقطه $(0, 1)$ روی نمودار این تابع قرار دارد. $y = 3^x \Rightarrow 1 = 3^0 \Rightarrow$

ت) $\left(\sqrt{3}, \frac{1}{3}\right)$

بنا بر این نقطه $\left(\sqrt{3}, \frac{1}{3}\right)$ روی نمودار این تابع قرار ندارد. $y = 3^x \Rightarrow \frac{1}{3} \neq 3^{\sqrt{3}} \Rightarrow$

ث) $(1, 3)$

بنا بر این نقطه $(3, 1)$ روی نمودار این تابع قرار دارد. $y = 3^x \Rightarrow 3 = 3^1 \Rightarrow$

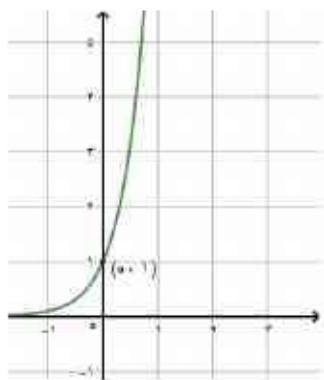
ج) $\left(-1, \frac{1}{3}\right)$

بنا بر این نقطه $\left(-1, \frac{1}{3}\right)$ روی نمودار این تابع قرار دارد. $y = 3^x \Rightarrow \frac{1}{3} = 3^{-1} \Rightarrow$

۳ کدام گزاره صحیح است؟

الف) نقطه $(\frac{1}{5}, \sqrt{5})$ روی نمودار تابع با ضابطه $y = 5^x$ قرار دارد.

الف) صحیح است $(\frac{1}{5}, \sqrt{5}) \Rightarrow \sqrt{5} = 5^{\frac{1}{5}}$



ب) محل تقاطع نمودار تابع با ضابطه $y = 10^x$ با محور y ها، نقطه $(0, 10)$ است.

راه اول: نمودار $y = 10^x$ را رسم می کنیم با توجه به نمودار گزاره غلط

است زیرا از نقطه $(0, 1)$ عبور می کند.

راه دوم: محل برخورد با تابع با ضابطه $y = 10^x$ نقطه $(0, 1)$ است.

$$x = 0 \Rightarrow y = (10)^0 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow (0, 1)$$

ب) دامنه توابع با ضابطه های $y = 2^x$ و $y = x^2$ مساوی اند.

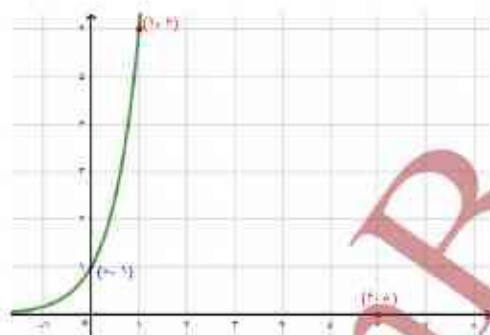
دامنه هر دو تابع مجموعه اعداد حقیقی است. بنا بر این گزاره صحیح است.

ت) محل تقاطع نمودار تابع با ضابطه $y = 6^x$ با محور x ها، نقطه $(6, 0)$ است.

نمودار تابع $y = 6^x$ را رسم می کنیم. با توجه به شکل نقطه $(6, 0)$ روی

نمودار نیست. بنا بر این گزاره صحیح نیست.

نکته: این نمودار محور x ها را قطع نمی کند.



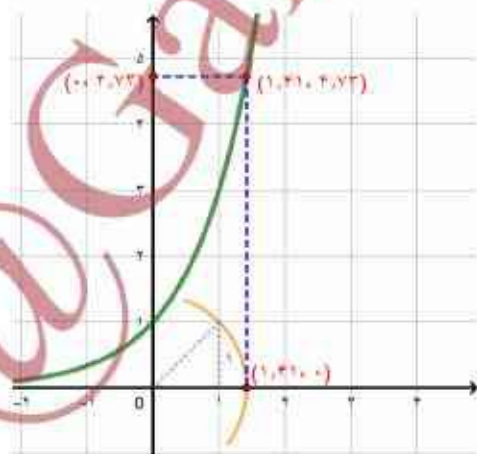
۴ الف) نمودار تابع با ضابطه $y = 3^x$ را رسم کنید و مقدار تقریبی عدد $3^{\sqrt{2}}$ را با توجه به نمودار به دست آورید.

x	0	1	$\sqrt{2} = 1/41$	2
y	1	3	$3^{\sqrt{2}} = 4/73$	9

ابتدا $\sqrt{2}$ را به کمک رسم روی محور x ها مشخص می کنیم

با توجه به نمودار رسم شده مقدار تقریبی $3^{\sqrt{2}}$ برابر است با

$$4/73$$



مقدار تقریبی $\sqrt{5} = 2.24$ را روی

به نمودار مقدار تقریبی $(-\frac{1}{2})^{\sqrt{e}}$ برابر

۵ فرض کنیم $f(x) = 3^x$, $g(x) = (\frac{1}{3})^x$ و $h(x) = 1^x$ مقادیر زیر را به دست آورید.

الف) $f(x) = 3^x \Rightarrow f(3) = 3^3 = 27$

ب) $g(x) = \left(\frac{1}{16}\right)^x \Rightarrow g(-1) = \left(\frac{1}{16}\right)^{-1} = 16$

c) $h(x) = 10^x \Rightarrow h(-2) = 10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100} = 0,01$

۶ معادلات نمایی زیر را حل کنید.

برای حل معادلات نمایی ابتدا هر دو طرف تساوی را هم پایه می‌کنیم.

(الف) $r^{rn-r} = \frac{1}{rr^r} \Rightarrow r^{rn-r} = (r^0)^{-r} \Rightarrow r^{rn-r} = r^{-10} \Rightarrow rn-r = -10 \Rightarrow n = -\frac{1}{r}$

$$(b) 9^{xy-2} = 27^{y+1} \Rightarrow (3^2)^{xy-2} = (3^3)^{y+1} \Rightarrow 3^{2xy-4} = 3^{3y+3} \Rightarrow 2xy-4 = 3y+3 \Rightarrow 2xy-3y = 7 \Rightarrow y = 7$$

$$c) F^{r \times r} = \frac{1}{\det F} \Rightarrow F^{r \times r} = (F^r)^{-r} \Rightarrow F^{r \times r} = F^{-1} \Rightarrow 3x + 2 = -9 \Rightarrow 3x = -11 \Rightarrow x = \frac{-11}{3}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } q^x &= p^{x^T - f^x} \Rightarrow (p^T)^x = p^{x^T - f^x} \Rightarrow p^{Tx} = p^{x^T - f^x} \Rightarrow Tx = x^T - f^x \Rightarrow x^T - \phi x = 0 \\ &\Rightarrow x(x - \phi) = 0 \Rightarrow x = 0, \quad x = \phi \end{aligned}$$

$$c) \left(\frac{3}{5}\right)^{x+1} = \frac{25}{9} \Rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^{x+1} = \left(\frac{5}{3}\right)^2 \Rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^{x+1} = \left(\frac{3}{5}\right)^{-2} \Rightarrow x+1 = -2 \Rightarrow x = -3$$

خواندنی

روش لگاریتم‌گیری در سال ۱۶۱۴ از سوی جان نپر (۱۶۱۷-۱۶۵۵)، ریاضی‌دان اسکاتلندی، در کتابی با عنوان «توصیفی بر قانون شگفت‌انگیز لگاریتم» ارائه شد.

در فیزیک مفهومی به نام شدت صوت وجود دارد که درک انسان را از بلندی صوت بیان می‌کند. تراز شدت یک صوت عبارت است از لگاریتم (در پایه ده) نسبت شدت آن صوت به شدت صوت مینا. تراز شدت صوت را با β نشان می‌دهند و یکای آن را به افتخار بیل فیزیکدان امریکایی مخترع تلفن، بِل (B) و دسی بِل (dB) نام‌گذاری کرده‌اند. هر بِل برابر ده دسی بِل است. (I : شدت صوت میناست که برابر آستانه شنوایی گوش سالم است).

$$\beta = \log_{10} I$$

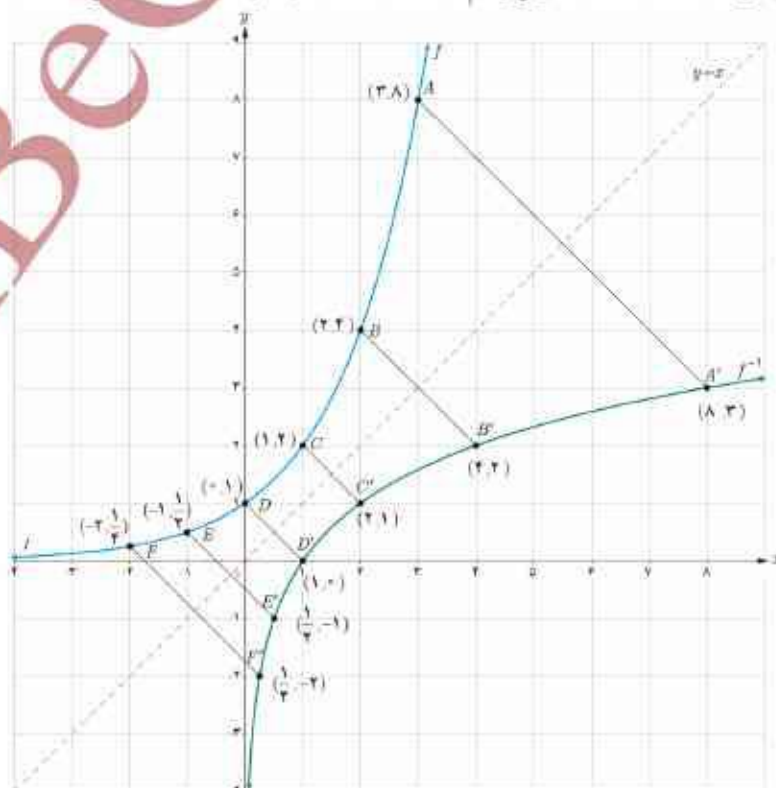
تراز شدن صوت dB	صدا
۰	شدت صوت مینا
۱۰	هس کشیدن
۲۰	برگ درختان در نسیم
۴۰	صحبت کردن از فاصله یک متری
۶۰	همهمه در فرودگاه
۷۰	سرود صدای خودرها در خیابان ملوح
۱۲۰	آستانه دردناکی (برای بسامد ۱۰۰۰ Hz)
۱۳۰	مسلل
۱۴۰	غرغش هواپیماي جت در حين بلند شدن
۱۷۰	راکت قطعی، در موقع بلند شدن

بسیاری از اندازه‌گیری‌ها در علوم مختلف، طیف وسیعی از اعداد را در برمی‌گیرد که برای سادگی محاسبات، می‌توان آنها را توان‌هایی از یک عدد خاص در نظر گرفت و اندازه‌های بسیار بزرگ را در ابعاد بسیار کوچک‌تری نشان داد یا اندازه‌های بسیار کوچک را در ابعاد مناسب نمایش داد. کاربرد این ساده‌سازی محاسبات در علوم مختلف مانند فیزیک، شیمی، زیست‌شناسی، زمین‌شناسی، جمعیت‌شناسی، مهندسی و... مشهود است.

تابع لگاریتمی

فعالیت

در درس اول با تابع نمایی با ضابطه $f(x) = 2^x$ و نمودار آن آشنا شدیم. همان‌طور که مشاهده کردیم، این تابع یک به یک است؛ بنابراین وارون آن نیز یک تابع است. نمودار تابع f و وارون آن، تابع f^{-1} در دستگاه مختصات زیر رسم شده است که نسبت به خط $y = x$ قرینه‌اند.



۱ دامنه و برد دو تابع f و f^{-1} در نمودار قبل را به دست آورید.

دامنه تابع f مجموعه اعداد حقیقی ($D_f = \mathbb{R}$) است. و برد آن مجموعه اعداد حقیقی نامنفی ($R_f = (0, +\infty)$) است.

دامنه تابع f^{-1} مجموعه اعداد حقیقی نامنفی ($D_{f^{-1}} = (0, +\infty)$) است. و برد آن مجموعه اعداد حقیقی ($R_{f^{-1}} = \mathbb{R}$) است.

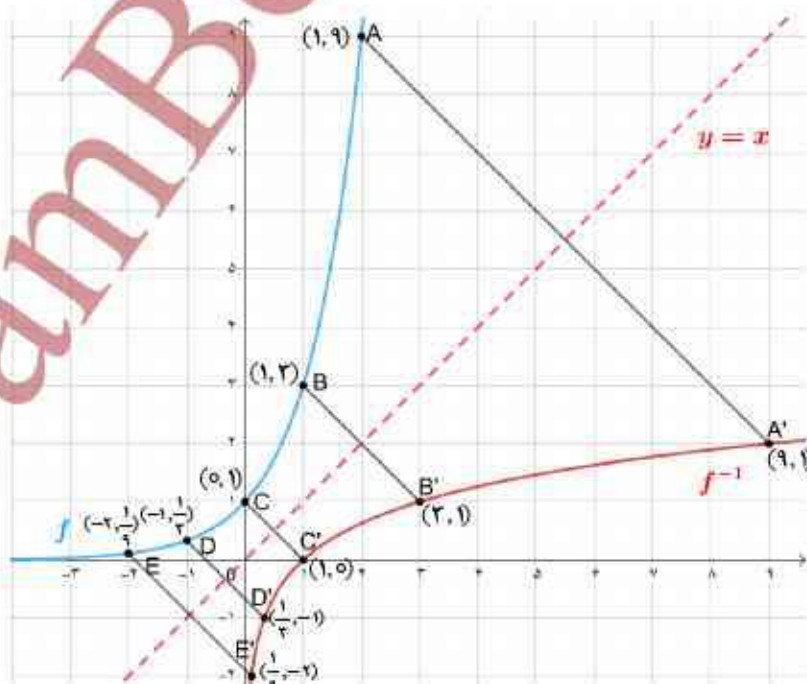
۲ با توجه به نقاط نمودار f و f^{-1} در نمودار، جدول زیر را تکمیل کنید.

$f(-2) = \frac{1}{4}$	$f(-1) = \frac{1}{2}$	$f(0) = 1$	$f(2) = 4$
$f^{-1}(\frac{1}{4}) = -2$	$f^{-1}(\frac{1}{2}) = -1$	$f^{-1}(1) = 0$	$f^{-1}(4) = 2$

فعالیت

نمودار تابع با ضابطه $f(x) = 3^x$ در دستگاه مختصات زیر رسم شده است.

۱ با توجه به نقاط نمودار f ، نمودار f^{-1} را رسم کنید.



۲ با توجه به نقاط f و f^{-1} در نمودار قبل، جاهای خالی را تکمیل کنید.

$f(-2) = \frac{1}{9}$	$f(0) = -1$	$f(1) = 3$	$f(-2) = 9$
$f^{-1}(\frac{1}{9}) = -2$	$f^{-1}(1) = 0$	$f^{-1}(3) = 1$	$f^{-1}(9) = -2$

۳ دامنه و برد دو تابع f و f^{-1} را به دست آورید.

دامنه تابع f مجموعه اعداد حقیقی ($D_f = \mathbb{R}$) است. و برد آن مجموعه اعداد حقیقی نامنفی ($R_f = (0, +\infty)$) است.

دامنه تابع f^{-1} مجموعه اعداد حقیقی نامنفی ($D_{f^{-1}} = (0, +\infty)$) است. و برد آن مجموعه اعداد حقیقی ($R_{f^{-1}} = \mathbb{R}$) است.

با توجه به مطالب فوق، وارون تابع با ضابطه $f(x) = 3^x$ را به صورت $f^{-1}(x) = \log_3 x$ نشان می‌دهیم و آن را لگاریتم x در مبنای ۳ می‌نامیم. به عبارت دیگر توابع نمایی و لگاریتمی وارون یکدیگرند.

۴ با توجه به نمودار توابع نمایی و لگاریتمی، دامنه و برد آنها را به طور کلی بنویسید.

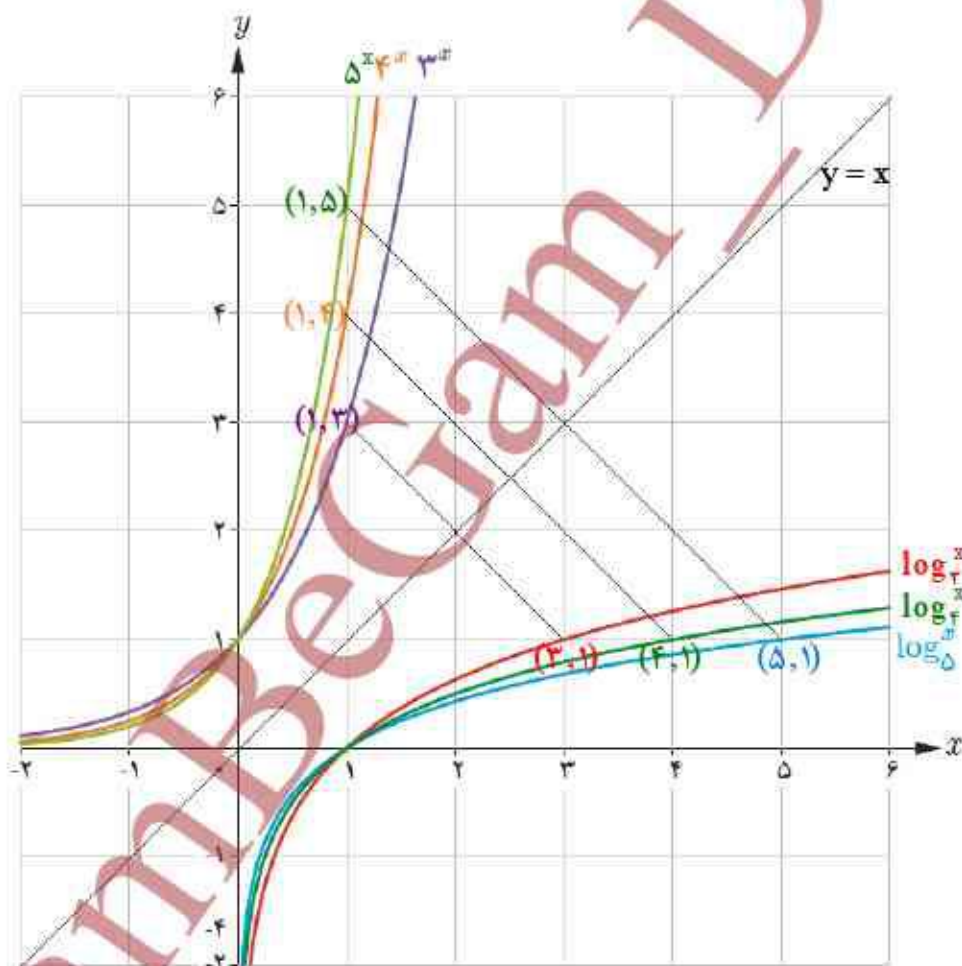
اگر $f(x) = a^x$ ($a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$) آنگاه $D_f = \mathbb{R}$ و $R_f = (0, +\infty)$

اگر $f^{-1}(x) = \log_a x$ ($a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$) آنگاه $D_{f^{-1}} = (0, +\infty)$ و $R_{f^{-1}} = \mathbb{R}$

وارون تابع نمایی با ضابطه $f(x) = a^x$ را به صورت $f^{-1}(x) = \log_a x$ نشان می‌دهیم و آن را لگاریتم x در مبنای a می‌نامیم. به عبارت دیگر برای هر عدد حقیقی مثبت a ($a \neq 1$) داریم:

$$f(x) = a^x \Leftrightarrow f^{-1}(x) = \log_a x$$

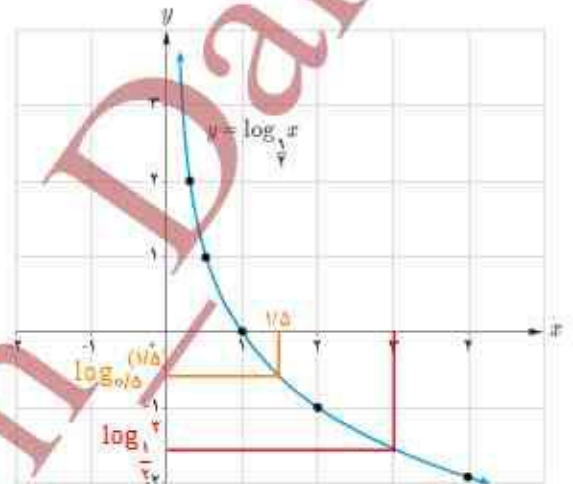
در شکل زیر، نمودار شش تابع رسم شده است که دو به دو وارون یکدیگرند. برای توابعی که ضابطه آنها نوشته شده، ضابطه وارون آنها را روی نمودار مربوطه بنویسید و دامنه و برد هر تابع را مشخص کنید.



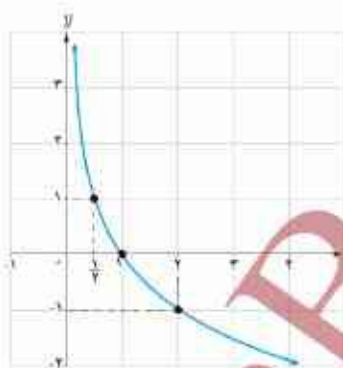
نمودار تابع با ضابطه $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ را در نظر بگیرید. اعداد زیر بین کدام اعداد صحیح قرار دارند؟

الف) $\log_{\frac{1}{2}} 3 \dots -2 < \log_{\frac{1}{2}} 3 < -1 \dots$

ب) $\log_{\frac{1}{5}} (1/5) \dots -1 < \log_{\frac{1}{5}} (1/5) < 0 \dots$

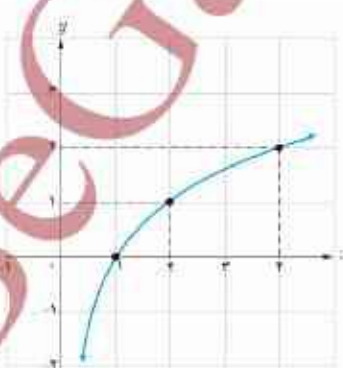


نمودار چند تابع لگاریتمی در زیر رسم شده است. ضابطه مربوط به هر کدام را بنویسید.



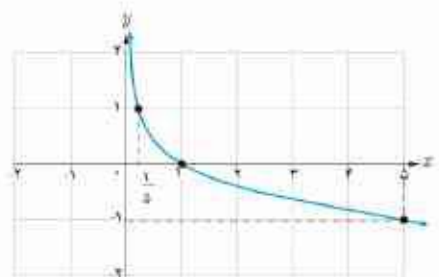
(۱)

$$y = \log_{\frac{1}{2}} x$$



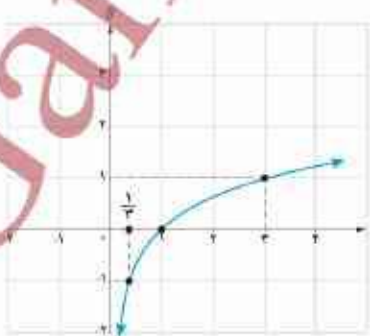
(۲)

$$y = \log_2 x$$



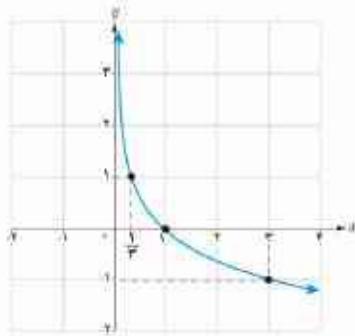
(۳)

$$y = \log_{\frac{1}{5}} x$$



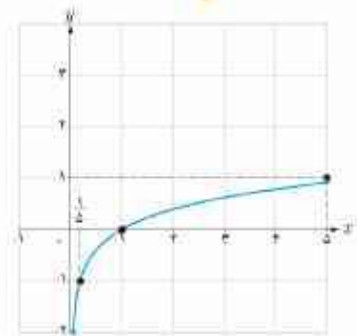
(۴)

$$y = \log_2 x$$



(۵)

$$y = \log_{\frac{1}{2}} x$$



(۶)

$$y = \log_5 x$$

تهیه و تنظیم: عطیه تبریزی

فعالیت

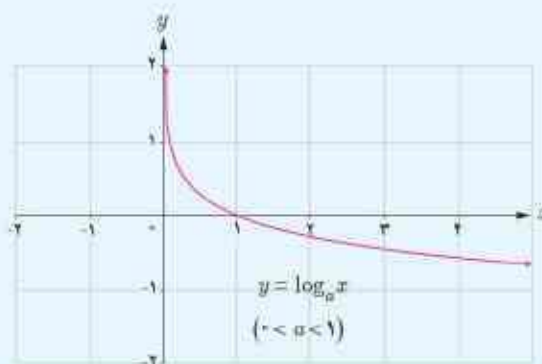
با توجه به مطالبی که تا به حال خوانده‌اید، جملات زیر را تکمیل کنید.

- ۱ دامنه تابع با ضابطه $y = \log_a x$ ($a > 1$)، مجموعه اعداد حقیقی مثبت و برد آن اعداد حقیقی است.
- ۲ دامنه تابع با ضابطه $y = \log_a x$ ($0 < a < 1$)، بازه $(0, +\infty)$ و برد آن اعداد حقیقی است.
- ۳ نمودار توابع فوق، محور x ها را در نقطه $x = 1$ قطع می‌کند و محور y ها را قطع نمی‌کند.
- ۴ این دو تابع، یک به یک هستند؛ زیرا خطوط موازی محور x ها، نمودار آنها را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند.
- ۵ وارون تابع نمایی، تابع لگاریتمی است و وارون تابع لگاریتمی، تابع نمایی است.

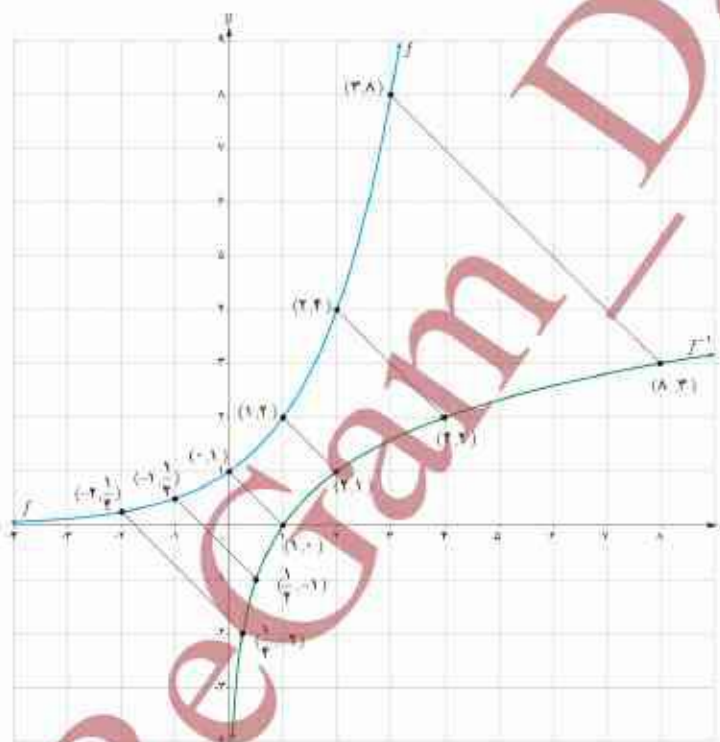
اگر a عدد حقیقی مثبت ($a \neq 1$) باشد، داریم: $a = 1$ ، بنابراین همواره:

$$\log_a 1 = 0$$

نمودار تابع لگاریتمی در حالت کلی، مشابه نمودارهای زیر است.



نمودار تابع با ضابطه $f(x) = 2^x$ و $f^{-1}(x) = \log_2 x$ را در نظر بگیرید.



با توجه به نقاط این دو نمودار، جدول زیر را تکمیل کنید.

نمایی	$2^{-2} = \frac{1}{4}$	$2^{-1} = \frac{1}{2}$	$2^0 = 1$	$2^1 = 2$	$2^2 = 4$	$2^3 = 8$
لگاریتمی	$\log_2 \frac{1}{4} = -2$	$\log_2 \frac{1}{2} = -1$	$\log_2 1 = 0$	$\log_2 2 = 1$	$\log_2 4 = 2$	$\log_2 8 = 3$

به طور کلی اگر $a^y = x$ آن گاه $\log_a x = y$ و به عکس. ($x > 0$, $a \neq 1$, $a > 0$)

$$b^a = c \Leftrightarrow \log_b c = a \quad (c > 0, b > 0, b \neq 1)$$

جدول زیر را مانند نمونه تکمیل کنید.

$10^3 = 1000 \rightarrow \log_{10} 1000 = 3$	$\log_8 1 = 0 \rightarrow 8^0 = 1$
$9^{\frac{1}{2}} = 3 \rightarrow \log_9 3 = \frac{1}{2}$	$\log_2 \left(\frac{1}{16}\right) = -4 \rightarrow 2^{-4} = \frac{1}{16}$
$4^3 = 64 \rightarrow \log_4 64 = 3$	$\log_5 125 = 3 \rightarrow 5^3 = 125$
$2^5 = 32 \rightarrow \log_2 32 = 5$	$\log_{\frac{1}{3}} 27 = -3 \rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} = 27$
$2^{-2} = \frac{1}{4} \rightarrow \log_2 \frac{1}{4} = -2$	$\log_{\frac{1}{5}} 125 = -3 \rightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^{-3} = 125$
$3^{-2} = \frac{1}{9} \rightarrow \log_3 \frac{1}{9} = -2$	$\log_{\frac{1}{2}} 16 = -4 \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = 16$

تذکره

لگاریتم در مبنای 10 را لگاریتم اعشاری می‌نامیم. در این حالت معمولاً مبنا نوشته نمی‌شود، یعنی به جای $\log_{10} a$ می‌نویسیم $\log a$.

خواندنی

ابداع لگاریتم یکی از مهم‌ترین ابداعات ریاضی است و کاربرد آن در ساده کردن محاسبات است. یا لگاریتم، عمل ضرب به جمع و عمل تقسیم به تفریق تبدیل می‌شود.

۱ اگر a عدد حقیقی مثبت ($a \neq 1$) باشد، همواره داریم:

$$\log_a 1 = 0 \quad \text{و} \quad \log_a a = 1 \quad \text{و} \quad \log_a \left(\frac{1}{a}\right) = -1$$

۲ برای اعداد حقیقی و مثبت a و b و c ($c \neq 1$) داریم:

$$\log_c ab = \log_c a + \log_c b$$

اثبات: فرض کنیم $m = \log_c a$ و $n = \log_c b$ ، پس طبق تعریف $a = c^m$ و $b = c^n$ ، از این رو $ab = c^m \cdot c^n = c^{m+n}$ بنابراین طبق تعریف لگاریتم داریم: $\log_c ab = m + n$ و در نتیجه:

$$\log_c ab = \log_c a + \log_c b$$

مثال: فرض کنید $\log 2 \approx 0.3$ و $\log 3 \approx 0.48$ ، مقدار $\log 6$ را حساب کنید.

$$\log 6 = \log(3 \times 2) = \log 3 + \log 2 \approx 0.48 + 0.3 = 0.78$$

۳ اگر a و b اعدادی حقیقی و مثبت و $a \neq 1$ و n یک عدد طبیعی باشد، داریم:

$$\log_a b^n = n \log_a b$$

اثبات:

$$\log_a b^n = \log_a \underbrace{b \dots b}_{n \text{ بار}} = \underbrace{\log_a b + \dots + \log_a b}_{n \text{ بار}} = n \log_a b$$

۴ برای اعداد حقیقی و مثبت a و b و c ($c \neq 1$) داریم:

$$\log_c \left(\frac{a}{b}\right) = \log_c a - \log_c b$$

اثبات: فرض می‌کنیم $\frac{a}{b} = d$ ، بنابراین:

$$a = bd \rightarrow \log_c a = \log_c b + \log_c d \rightarrow \log_c d = \log_c a - \log_c b$$

$$\log_c \frac{a}{b} = \log_c a - \log_c b$$

مثال: اگر $\log 2 \approx 0/3$ ، مقدار $\log 5$ را محاسبه کنید.

$$\log 5 = \log \frac{10}{2} = \log 10 - \log 2 = 1 - \log 2 \approx 1 - 0/3 = 0/7$$



خواندنی

همزمان با افزایش ارتفاع، فشار هوای اتمسفر (جو زمین) کاهش می‌یابد. رابطه محاسبه فشار براساس ارتفاع به صورت $a = 15500(5 - \log P_0)$ است، که در آن a ارتفاع بر حسب متر و P_0 نیز فشار بر حسب پاسکال است. فشار هوا را در بالای قله دماوند به ارتفاع ۵۶۱۰ متر محاسبه کنید.

خواندنی

لایلاس دانشمند بزرگ فرانسوی دربارهٔ لگاریتم گفته است:
«لگاریتم ابزاری است قابل ستایش که به کمک آن کار چند ماه به چند روز کاهش می‌یابد، عمر اخترشناسان را دو برابر می‌کند و از خطاهای کوچک می‌گذرد و از عبارات طولانی و جدا نشدنی ریاضی بیزار است».

کار در کلاس

اگر $\log 2 \approx 0/3$ و $\log 3 \approx 0/48$ ، مقادیر تقریبی اعداد زیر را به دست آورید.

۱) $\log 12 = \log (3 \times 4) = \log 3 + \log 2^2 = \log 3 + 2 \log 2 \approx 0/48 + 0/6 = 0/98$

۲) $\log 0/75 = \log \frac{3}{4} = \log 3 - \log 4 = \log 3 - \log 2^2 = \log 3 - 2 \log 2 \approx 0/48 - 0/6 = 0/42$

۳) $\log \sqrt{5} = \log \left(\frac{10}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log \left(\frac{10}{2}\right) = \frac{1}{2} (\log 10 - \log 2) = \frac{1}{2} (1 - 0/3) = 0/35$

۴) $\log \frac{25}{18} = \log \frac{100}{72} = \log 100 - \log 72 = \log 100 - \log (2^3 \times 3^2) = \log 100 - (\log 2^3 + \log 3^2)$
 $= \log 100 - (3 \log 2 + 2 \log 3) = 2 - (0/9 + 0/96) = 0/14$

۵) $\log \sqrt[3]{6} = \log (2 \times 3)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} (\log 2 + \log 3) = \frac{1}{3} (0/3 + 0/48) = 0/26$

۶) $\log \frac{\sqrt{27}}{\sqrt[3]{5}} = \log \sqrt{27} - \log \sqrt[3]{5} = \log 3^{\frac{3}{2}} - \log 5^{\frac{1}{3}} = \frac{3}{2} \log 3 - \frac{1}{3} \log 5 = \frac{3}{2} (0/48) - \frac{1}{3} (0/7) = 0/89$

معادلات لگاریتمی

یکی از مهم‌ترین کاربردهای لگاریتم، حل معادلات لگاریتمی است که معمولاً از مدل‌سازی یک مسئله واقعی به دست می‌آید. مانند محاسبه شدت زلزله، مشخص کردن ضعیف‌ترین صدای قابل شنیدن یا آستانه شنوایی، پیش‌بینی تعداد جمعیت یک جامعه پس از زمان مشخص و محاسبه نیمه عمر عناصر رادیواکتیو. معادلات زیر نمونه‌هایی از معادلات لگاریتمی اند:

$$\log_3 x + 1 = 3, \quad \log_3 x = \log_3 7, \quad \log_5 x + \log_5 (x-1) = \log_5 12$$

منظور از حل معادله لگاریتمی، پیدا کردن مقادیری برای مجهول است که در معادله صدق کند.

به طور کلی اگر a یک عدد حقیقی مثبت ($a \neq 1$)، باشد آن گاه با توجه به یک به یک بودن تابع لگاریتمی، از تساوی $\log_a x = \log_a y$ ($x, y > 0$) می‌توان نتیجه گرفت $x = y$ و به عکس، اگر $x = y$ ($x, y > 0$) آن گاه $\log_a x = \log_a y$.

فعالیت

معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید.

۱ $\log_3 x = 2 \rightarrow x = 3^2 = 9$

۲ $\log_5 (x+6) = \log_5 (2x-3) \rightarrow x+6 = 2x-3 \rightarrow x=9$

که $x=9$ برای هر دو لگاریتم قابل قبول است.

۳ $\log_5 (x+6) + \log_5 (x+2) = 1 \rightarrow \log_5 [(x+6)(x+2)] = 1$

$$\rightarrow (x+6)(x+2) = 5 \rightarrow x^2 + 8x + 12 = 5$$

$$\rightarrow x^2 + 8x + 7 = 0 \rightarrow (x+7)(x+1) = 0 \rightarrow x = -7 \text{ یا } x = -1$$

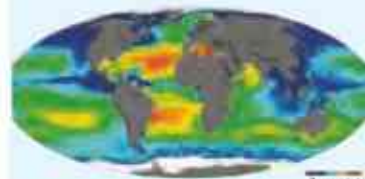
توجه کنید که $x = -7$ قابل قبول نیست؛ از این رو تنها جواب $x = -1$ قابل قبول است که در معادله اصلی صدق می‌کند.

خواندنی

شوری آب اقیانوس‌ها با عرض جغرافیایی (فاصله از خط استوا) و عمق اقیانوس تغییر می‌کند. در مناطق استوایی میزان شوری آب در سطح اقیانوس‌ها به دلیل تبخیر سریع آب، بیشتر است. هرچه به قطب نزدیک‌تر می‌شویم، کاهش تبخیر و بارش باران باعث می‌شود شوری سطح آب کاهش یابد. تابع مربوطه عبارت است از:

$$S(x) = 37/5 + 1/\log(x+1)$$

که در این رابطه x نشان دهنده عمق به متر و $S(x)$ نشان دهنده مقدار گرم نمک موجود در هر کیلوگرم آب اقیانوس است.



$$۴ \quad \log_4(x+2) = \log_4 8 \rightarrow x+2=8 \rightarrow x=6$$

$$۵ \quad 3 \log_7 x = -\log_7 27 \rightarrow \log_7 x^3 = \log_7 \frac{1}{27} \rightarrow x^3 = \frac{1}{27} \rightarrow x = \frac{1}{3}$$

$$۶ \quad \log(x+1) - \log(x-3) = 3 \rightarrow \log \frac{x+1}{x-3} = 3 \rightarrow \log \frac{x+1}{x-3} = \log 1000$$

$$\rightarrow \frac{x+1}{x-3} = 1000 \rightarrow x+1 = 1000x - 3000$$

$$\rightarrow 3001 = 999x \rightarrow x = 3/004$$

کار در کلاس

معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید.

$$۱ \quad \log_5 x = 3 \rightarrow x = 5^3 \rightarrow x = 125$$

$$۲ \quad \log_2(2x+1) = 3 \rightarrow 2x+1 = 2^3 \rightarrow 2x+1 = 8 \rightarrow 2x = 7 \rightarrow x = 7/2$$

$$۳ \quad \log_2(x+1) + \log_2(x+4) = 2 \rightarrow \log_2(x+1)(x+4) = \log_2 4 \rightarrow (x+1)(x+4) = 4$$

$$\rightarrow x^2 + 5x + 4 = 4 \rightarrow x^2 + 5x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -5 \end{cases}$$

توجه کنید که $x = -5$ قابل قبول نیست؛ از این رو تنها جواب قابل قبول $x = 0$ است.

$$۴ \quad \log_3 243 = 2x+1 \rightarrow 243 = 3^{2x+1} \rightarrow 3^5 = 3^{2x+1} \rightarrow 2x+1 = 5 \rightarrow x = 2$$

$$۵ \quad \log_3(x-1) = 4 \rightarrow x-1 = 3^4 \rightarrow x = 81+1 \rightarrow x = 82$$

$$۶ \quad \log(2x) - \log(x-3) = 1 \rightarrow \log\left(\frac{2x}{x-3}\right) = \log 10 \rightarrow \frac{2x}{x-3} = 10$$

$$\rightarrow 2x = 10x - 30 \rightarrow 8x = 30 \rightarrow x = \frac{30}{8} = 3/75$$

$$۷ \quad 2 \log_2(x-1) = 3 \rightarrow \log_2(x-1)^2 = \log_2 64 \rightarrow (x-1)^2 = 64$$

$$\rightarrow \begin{cases} x-1 = 8 \rightarrow x = 9 \\ x-1 = -8 \rightarrow x = -7 \end{cases}$$

توجه کنید که $x = -7$ قابل قبول نیست.

تمرین

۱ تساوی‌های زیر را ثابت کنید.

الف) $\log_c abd = \log_c a + \log_c b + \log_c d$ ($c \neq 1$ و a و b و d اعداد حقیقی مثبت‌اند)

$$\log_c abd = \log_c (ab)d = \log_c (ab) + \log_c d = \log_c a + \log_c b + \log_c d$$

ب) $\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$ (b و c و a اعداد حقیقی مثبت‌اند و $c \neq 1$ و $b \neq 1$)

اگر $x = \log_b a$ آنگاه داریم: $b^x = a$ حالا از دو طرف این تساوی لگاریتم در مبنای c می‌گیریم:

$$b^x = a \rightarrow \log_c b^x = \log_c a \rightarrow x \log_c b = \log_c a$$

$$\rightarrow x = \frac{\log_c a}{\log_c b} \xrightarrow{x = \log_b a} \log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$$

پ) $a^{\log_a b} = b$ ($a \neq 1$ و a و b اعداد حقیقی مثبت‌اند)

$$b = a^x \xrightarrow{x = \log_a b} b = a^{\log_a b}$$

اگر $\log_a b = x$ آنگاه داریم:

ت) $\log_b a \times \log_a b = 1$

با توجه به رابطه قسمت (ب) داریم:

$$\left. \begin{array}{l} \log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b} \\ \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \end{array} \right\} \rightarrow \log_b a \times \log_a b = \frac{\log_c a}{\log_c b} \times \frac{\log_c b}{\log_c a} = 1 \rightarrow \log_b a \times \log_a b = 1$$

۲ حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

الف) $\log_v \sqrt[5]{49} = \log_v (49)^{\frac{1}{5}} = \log_v (7^2)^{\frac{1}{5}} = \log_v (7)^{\frac{2}{5}} = \frac{2}{5} \log_v 7 = \frac{2}{5}$

ب) $\log_3 2\sqrt[3]{2} = \log_3 (2^{\frac{1}{3}})^{\frac{2}{3}} = \log_3 (2)^{\frac{2}{9}} = \frac{2}{9} \log_3 2 = \frac{2}{9}$

ب) $-\log_5 125 = -\log_5 (5)^3 = -3 \log_5 5 = -3$

ت) $3 \log_{10} \sqrt{10000} = 3 \log_{10} \sqrt{10^4} = 3 \log_{10} (10)^{\frac{2}{2}} = 3 \times \frac{3}{2} \log_{10} 10 = \frac{9}{2}$

۳ اگر $f(x) = 3 - 2 \log_4 \left(\frac{x}{4} - 5 \right)$ مقدار $f(42)$ را به دست آورید.

$$f(42) = 3 - 2 \log_4 \left(\frac{42}{4} - 5 \right) = 3 - 2 \log_4 16 = 3 - 2 \log_4 (4)^2 = 3 - 2 \times 2 \log_4 4 = 3 - 4 = -1$$

$$\rightarrow f(42) = -1$$

۴ الف) اگر نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \log_a x$ از نقطه $(2, 2)$ عبور کند، مقدار a را به دست آورید.

$$f(2) = 2 \rightarrow \log_a 2 = 2 \rightarrow a^2 = 2 \rightarrow a = \sqrt{2}, a = -\sqrt{2}$$

چون a باید مثبت و مخالف ۱ باشد پس $a = -\sqrt{2}$ غیر قابل قبول است.

ب) اگر نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \log_a x$ از نقطه $\left(\frac{1}{4}, -2\right)$ عبور کند، مقدار a چند است؟

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = -2 \rightarrow \log_a \left(\frac{1}{4}\right) = -2 \rightarrow a^{-2} = \frac{1}{4} \rightarrow \frac{1}{a^2} = \frac{1}{4} \rightarrow a^2 = 4 \rightarrow a = \sqrt{4}, a = -\sqrt{4}$$

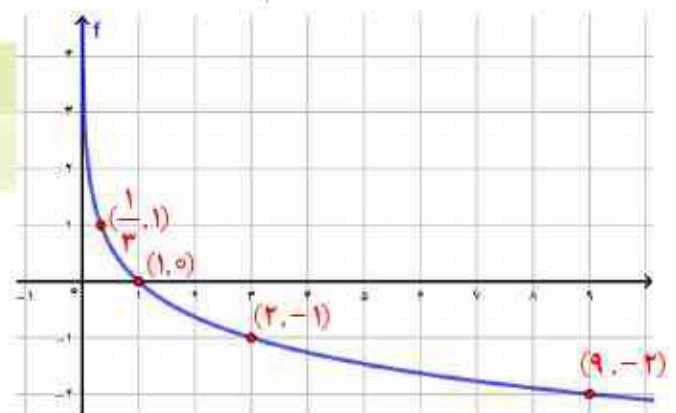
چون a باید مثبت و مخالف ۱ باشد پس $a = -\sqrt{4}$ غیر قابل قبول است.

۵ نمودار تابع با ضابطه $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ را رسم کنید.

x	$\frac{1}{3}$	1	3	9
y	1	0	-1	-2

به کمک جدول نقاط را در صفحه پیدا می کنیم و به هم

وصل می کنیم



۶ کدام یک از گزاره‌های زیر درست و کدام نادرست است؟

الف) اگر $y = \log_a x$ ، آنگاه $a^x = y$.

نادرست است زیرا به طور کلی اگر $a^y = x$ آن گاه $\log_a x = y$ و به عکس $(x > 0, a \neq 1, a > 0)$

ب) نمودار تابع با ضابطه $y = \log_a x$ ($0 < a < 1$) از نقطه $(1, 0)$ عبور می‌کند.

راه اول: نمودار تابع را رسم می‌کنیم و بررسی می‌کنیم که نقطه $(1, 0)$ روی نمودار هست یا نه.



راه دوم: می‌توانیم به جای x عدد ۱ را قرار دهیم و سپس مقدار y را به دست آوریم.

$$x = 1 \rightarrow \log_a 1 = 0 \rightarrow y = 0$$

بنابراین نمودار تابع با ضابطه $\log_a x = y$ ($0 < a < 1$) از نقطه $(1, 0)$ عبور می‌کند.

ب) لگاریتم اعداد منفی تعریف نمی‌شود.

درست است. با توجه به تعریف ص ۱۱۰ کتاب.

۷ معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید.

الف) $\log_2(p^2 - 2) = \log_2 p \rightarrow p^2 - 2 = p \rightarrow p^2 - p - 2 = 0 \rightarrow (p - 2)(p + 1) = 0 \rightarrow p = 2, p = -1$

توجه کنید که $p = -1$ قابل قبول نیست.

ب) $\log_5(x+1) + \log_5(x-1) = 1$

$$\log_5(x+1)(x-1) = 1 \rightarrow (x+1)(x-1) = 5^1 \rightarrow x^2 - 1 = 5 \rightarrow x^2 = 6 \rightarrow x = -\sqrt{6}, x = \sqrt{6}$$

توجه کنید که $x = -\sqrt{6}$ قابل قبول نیست.

تهیه و تنظیم: عطیه تبریزی

$$\text{پ) } 3\log_7 a - \log_7 5 = \log_7 25 \rightarrow \log_7 \left(\frac{a^3}{5}\right) = \log_7 25 \rightarrow \frac{a^3}{5} = 25 \rightarrow a^3 = 125 \rightarrow a^3 = 5^3 \rightarrow a = 5$$

$$\text{ت) } \log_{\frac{1}{10}} (x^2 - 21) = -2$$

$$x^2 - 21 = \left(\frac{1}{10}\right)^{-2} \rightarrow x^2 - 21 = 10^2 \rightarrow x^2 - 21 = 100 \rightarrow x^2 = 121 \rightarrow x = -11, x = 11$$

توجه کنید که $x = -11$ قابل قبول نیست

نمودارهای توابع نمایی و لگاریتمی

در درس اول و دوم با نمودار توابع نمایی و لگاریتمی آشنا شدیم. نمودار این توابع را می‌توان با استفاده از قوانینی که قبلاً فرا گرفته‌ایم، انتقال دهیم.

با توجه به آنچه که در مبحث انتقال توابع گفته شد، فعالیت زیر را انجام دهید.

فعالیت

نمودار هر تابع را به ضابطه آن نظیر کنید.

الف) $k(x) = -\log_2 x \rightarrow (۶)$

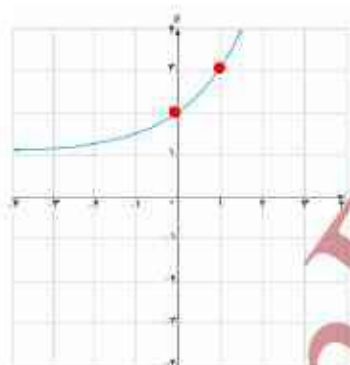
ت) $g(x) = \log_2(x-1) \rightarrow (۲)$

ب) $l(x) = 2 + \log_2 x \rightarrow (۴)$

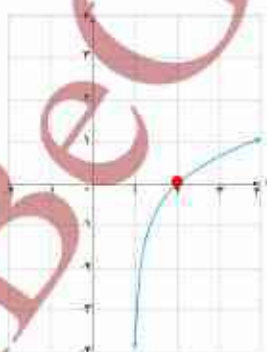
ث) $j(x) = 3^{(x-1)} \rightarrow (۵)$

ب) $h(x) = -\left(\frac{1}{2}\right)^x \rightarrow (۳)$

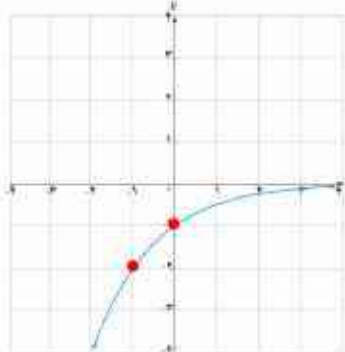
ج) $f(x) = 2^x + 1 \rightarrow (۱)$



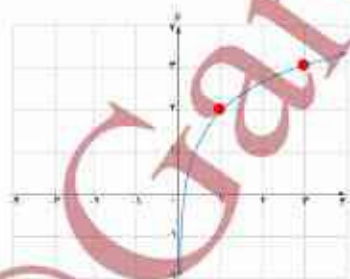
(۱)



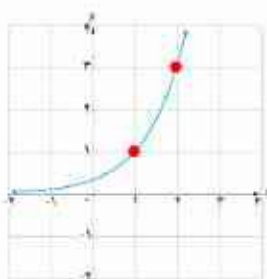
(۲)



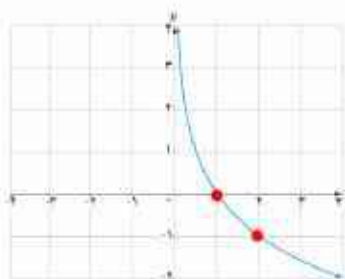
(۳)



(۴)



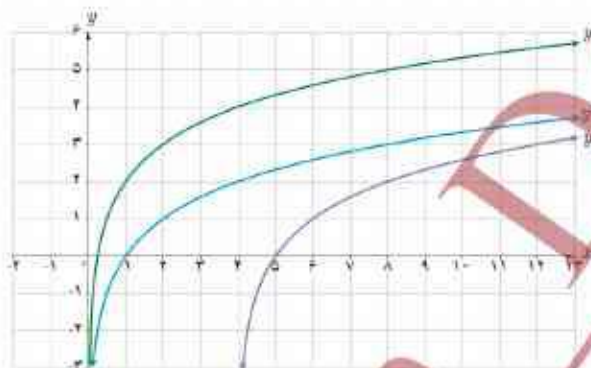
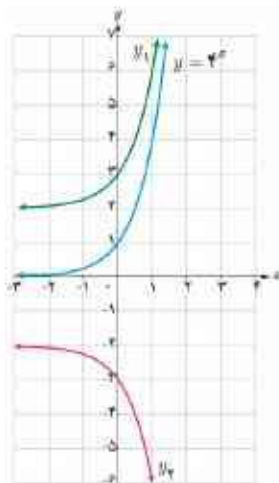
(۵)



(۶)

در هر قسمت می‌توان نقاط کلیدی (•) را در معادله‌ها امتحان کرد.

در شکل‌های زیر، نمودار یک تابع نمایی و یک تابع لگاریتمی و انتقال یافته‌های آنها رسم شده است. ضابطه توابع انتقال یافته را بنویسید.



$$y = 2^x \rightarrow \begin{cases} y_1 = 2 + 2^x \\ y_2 = -(2 + 2^x) \end{cases}$$

$$y = \log_2 x \rightarrow \begin{cases} y_1 = 2 + \log_2 x \\ y_2 = \log_2(x - 4) \end{cases}$$

کدام یک از ضابطه‌ها به کدام یک از نمودارها تعلق دارند؟

۱) $y = \log_2(x - 1)$ → (ت)

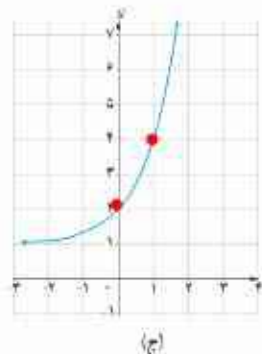
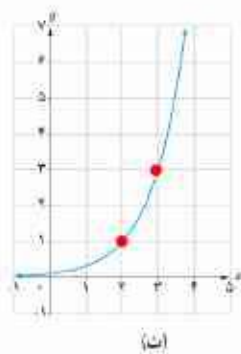
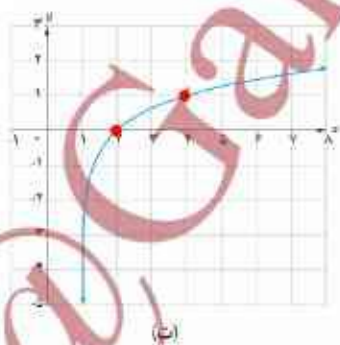
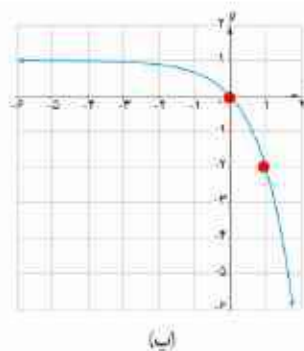
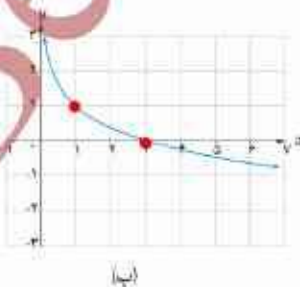
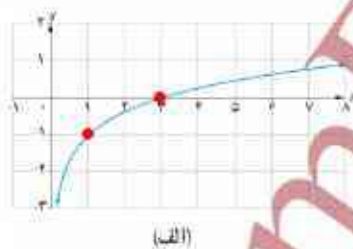
۲) $y = 3^{x+1}$ → (ج)

۳) $y = 1 - 3^x$ → (ب)

۴) $y = \log_2 x - 1$ → (الف)

۵) $y = 1 - \log_2 x$ → (پ)

۶) $y = 3^{(x-2)}$ → (ث)



کاربرد توابع نمایی و لگاریتمی

تابع نمایی:

در حالت کلی یک تابع به صورت $h(x) = ka^x$ ($a \neq 1, a > 0$) مانند یک تابع نمایی رفتار می کند که در بسیاری از مسائل اقتصادی، طبیعی و مهندسی و... ظاهر می شود.



توده باکتری اشریشیاکلی

مثال: اشریشیاکلی (Escherichia coli) با به طور اختصار E.coli نوعی باکتری است که به طور طبیعی در دستگاه گوارش زندگی می کند و تکثیر آن به صورت نمایی است. عوامل مختلفی مانند زیاد شدن آن باعث بیماری می شود. نوع خاصی از این بیماری با 10^6 باکتری شروع می شود و هر باکتری در مدت نیم ساعت به دو قسمت تقسیم می شود. اندازه هر توده باکتری بعد از t ساعت از رابطه زیر به دست می آید:

$$p(t) = 1000 \times 2^{2t} \quad (0 \leq t \leq 16)$$

با فرض اینکه هیچ کدام از باکتری ها از بین نروند، تعداد باکتری ها در یک توده پس از ۳ ساعت برابر است با:

$$p(3) = 1000 \times 2^6 = 64000$$

تابع لگاریتمی:

ریشتر، مقیاسی برای اندازه گیری بزرگی زمین لرزه است که میزان انرژی آزاد شده در زلزله را نشان می دهد. اگر بزرگی زلزله ای برابر M در مقیاس ریشتر باشد، انرژی آزاد شده آن زلزله برابر E در واحد آرگ (Erg) است که از رابطه زیر به دست می آید:

$$\log E = 11/8 + 1/5 M$$

انرژی یک زلزله ۸ ریشتری تقریباً برابر با انرژی انفجار یک میلیارد تن ماده انفجاری TNT است.

مثال: روز پنجم دی ماه ۱۳۸۲ زلزله ای به شدت ۶/۶ ریشتر، شهر بم و مناطق اطراف آن را در شرق استان کرمان لرزاند. مقدار انرژی آزاد شده در این زلزله چقدر بوده است؟

$$\log E = 11/8 + 1/5 M \rightarrow$$

$$\log E = 11/8 + 1/5 (6/6)$$

$$\rightarrow \log E = 21/7 \rightarrow E = 10^{21/7} \text{ Erg}$$

کار در کلاس



زلزله ۳۱ خرداد سال ۱۳۶۹ رودبار - منجیل
به بزرگی ۷/۴ ریشتر در ساعت سی دقیقه بامداد
رخ داد. مقدار انرژی آزاد شده در این زلزله را
محاسبه کنید.

$$\log E = 11/8 + 1/5 M$$

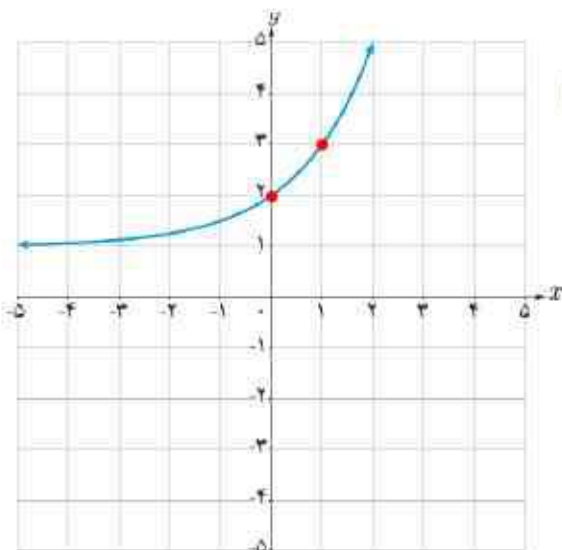
$$\rightarrow \log E = 11/8 + 1/5 (7/4)$$

$$\rightarrow \log E = 22/9 \rightarrow E = 10^{22/9} \text{ Erg}$$

تهیه و تنظیم: عطیه تبریزی



۱ در دستگاه مختصات روبه‌رو نمودار تابع با ضابطه $y = a + 2^{(x-b)}$ رسم شده است. a و b را به دست آورید.



راه اول: نقاط کلید در این نمودار را مشخص می‌کنیم که عبارتند از:

$(0, 2)$ و $(1, 3)$ در نتیجه با جایگذاری در ضابطه تابع داریم:

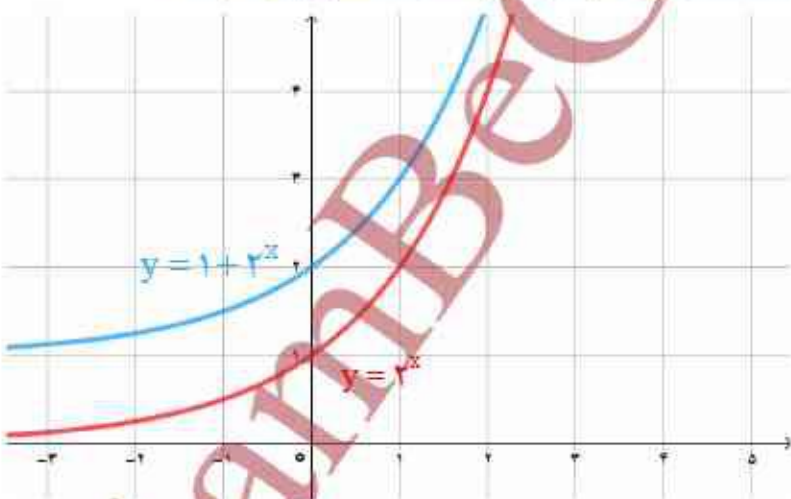
$$\begin{cases} 2 = a + 2^{(0-b)} \rightarrow 2 = a + 2^{-b} \\ 3 = a + 2^{(1-b)} \rightarrow 3 = a + 2^{(1-b)} \end{cases}$$

$$\rightarrow 1 = 2^{(1-b)} = 2^{-b} \rightarrow 1 = 2 \times 2^{-b} - 2^{-b} \rightarrow 1 = 2^{-b} (2 - 1)$$

$$\rightarrow 2^{-b} = 1 \rightarrow \frac{1}{2^b} = 1 \rightarrow 2^b = 1 \rightarrow b = 0$$

$$\rightarrow 2 = a + 2^0 \rightarrow a = 1$$

راه دوم: نمودار $y = 2^x$ را در نظر می‌گیریم اگر این نمودار را توجه به انتقال به اندازه ۱ واحد به سمت بالا روی محور عرض‌ها انتقال دهیم نمودار داده شده به دست می‌آید. بنا براین با مقایسه معلوم می‌شود که:



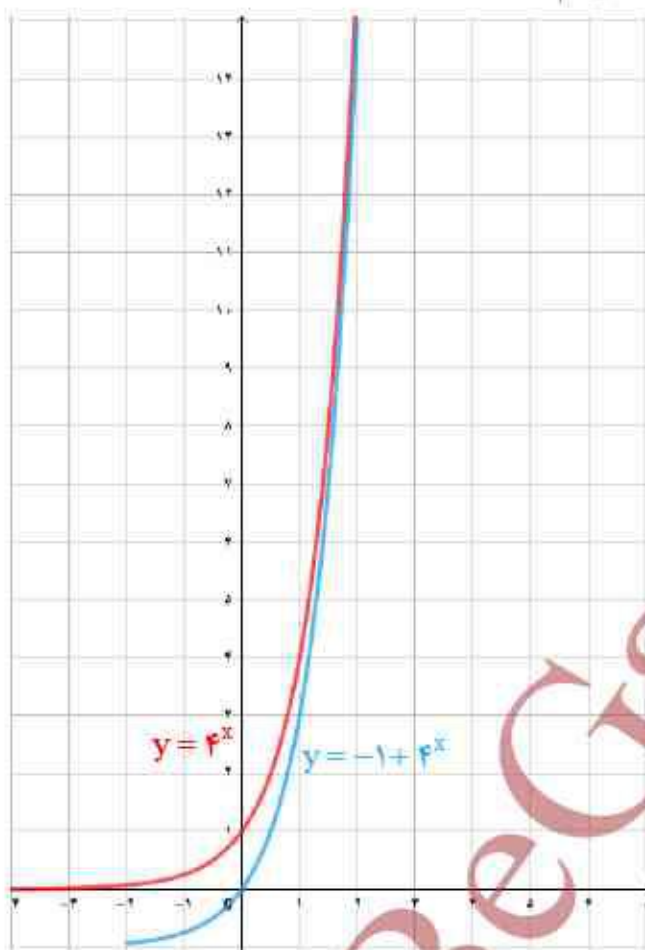
$$\left. \begin{array}{l} y = 1 + 2^x \\ y = a + 2^{(x-b)} \end{array} \right\} \rightarrow a = 1, b = 0$$

۲ فرض می‌کنیم $g(x) = 4^x + 2$. الف) $g(-1)$ را به دست آورید. ب) اگر $g(x) = 66$ ، مقدار x چقدر است؟

$$g(-1) = 4^{(-1)} + 2 \rightarrow g(-1) = \frac{1}{4} + 2 = \frac{9}{4}$$

$$66 = 4^x + 2 \rightarrow 64 = 4^x \rightarrow 4^2 = 4^x \rightarrow x = 2$$

۳ نمودار تابع با ضابطه $y = 4^x - 1$ را در بازه $[-2, 2]$ رسم کنید.



برای رسم از انتقال استفاده می کنیم کافی است نمودار

$y = 4^x$ را یک واحد روی محور عرض ها به سمت پایین

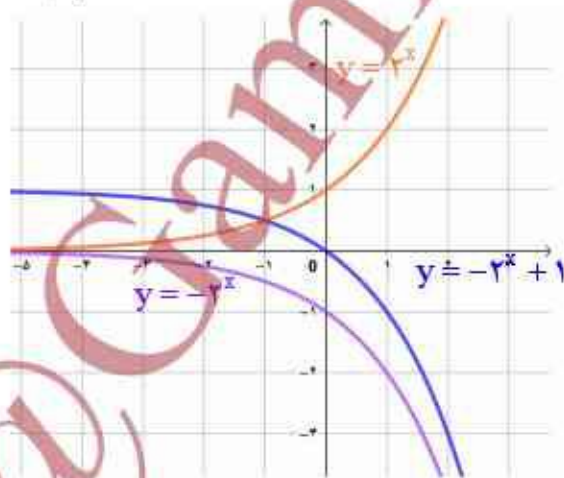
انتقال دهیم. و بعد در بازه $[-2, 2]$ آن را رسم کنیم به

این ترتیب داریم:

۴ نمودار توابع زیر را رسم کنید.

به کمک انتقال و تقارن نسبت به محور طولها رسم می شود.

الف) $y = -2^x + 1$



ب) $y = -\log_2(x - 1)$

